Función signo

Sea la función $sign: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ definida así:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Una aproximación mediante una función continuamente diferenciable es:

$$sign(x) = \lim_{n\to\infty} \tanh(nx)$$

Obviamente la convergencia aquí no es uniforme, sólo puntual.

Función delta

Sea la función $\delta: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 - sign^2(x)$$

Ejemplo

Sea la función $sign_\infty: \mathbb{R} \to \{-\infty, 0, +\infty\}$ definida así:

$$sign_\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases}$$

$$sign_\infty(x) = \frac{x}{\delta(x)}$$

Función valor absoluto

Sea la función $|\quad|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida así:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x| = xsign(x)$$

Funciones mínimo y máximo

Sea la función $min: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida así:

$$min(x,y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

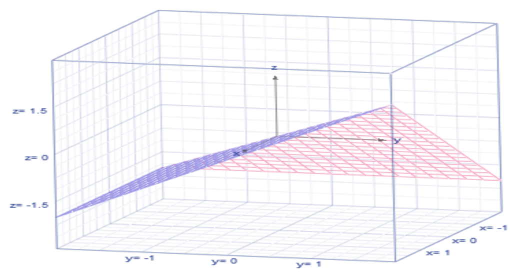
En la expresión $\frac{1-sign(x-y)}{2}x + \frac{1+sign(x-y)}{2}y$, la discontinuidad en $x = y$ es removible. Así se obtiene:

$$min(x,y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}$$

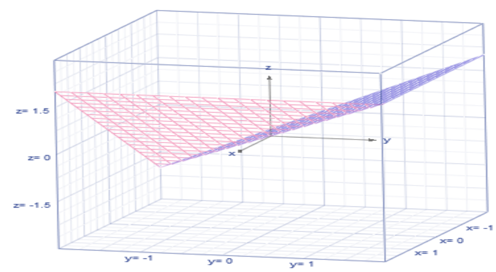
Luego, la función $max: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define así:

$$max(x,y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$$

$$max(x,y) = (x+y) - min(x,y) = \frac{(x+y) + |x-y|}{2}$$



$z = min(x,y)$



$z = max(x,y)$

Relación de Pertenencia a un intervalo cerrado

Sea la función $g: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$g\big((a,b),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \end{cases}$$

$$g\big((a,b),x\big) = 1 - \delta\big(sign(x-a) - sign(x-b)\big) = sign^2\big(sign(x-a) - sign(x-b)\big)$$

Operaciones sobre intervalos cerrados

Complemento

$$1 - g\big((a,b),x\big) = \begin{cases} 0, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \\ 1, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \end{cases}$$

Intersección

Sea la función $h: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$h\big((a,b),(c,d),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$h\big((a,b),(c,d),x\big) = g\big((a,b),x\big) g\big((c,d),x\big)$$

Diferencia

Sea la función $i: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$i\big((a,b),(c,d),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] - [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] - [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$i\big((a,b),(c,d),x\big) = g\big((a,b),x\big)\Big(1 - g\big((c,d),x\big)\Big)$$

Diferencia Simétrica

Sea la función $j: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$j\big((a,b),(c,d),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \vartriangle [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \vartriangle [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$j\big((a,b),(c,d),x\big) = \big|g\big((a,b),x\big) - g\big((c,d),x\big)\big|$$

Unión

Sea la función $k: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)] \cup [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)] \cup [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = j\big((a,b),(c,d),x\big) + h\big((a,b),(c,d),x\big)$$

Si $[min(a,b), max(a,b)] \cap [min(c,d), max(c,d)] = \emptyset$, entonces,

$$k\big((a,b),(c,d),x\big) = g\big((a,b),x\big) + g\big((c,d),x\big)$$

Identidades para el Complemento

- $1 - h\big((a,b),(c,d),x\big) = 1 - g\big((a,b),x\big)g\big((c,d),x\big)$
- $1 - k\big((a,b),(c,d),x\big) = \Big(1 - g\big((a,b),x\big)\Big)\Big(1 - g\big((c,d),x\big)\Big)$

Producto Cartesiano

Sea la función $l: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$l\big((a,b),(c,d),(x,y)\big) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin [min(a,b), max(a,b)] \times [min(c,d), max(c,d)] \\ 1, & (x,y) \in [min(a,b), max(a,b)] \times [min(c,d), max(c,d)] \end{cases}$$

$$l\big((a,b),(c,d),(x,y)\big) = g\big((a,b),x\big)g\big((c,d),y\big)$$

Relación de Pertenencia a intervalos abiertos y semiabiertos

Sea la función $g_{-\infty}: \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$g_{-\infty}(c,x) = \begin{cases} 0, & x \notin \,]-\infty, c] \\ 1, & x \in \,]-\infty, c] \end{cases}$$

$$g_{-\infty}(c,x) = \lim_{min(a,b) \to -\infty} g\big((a,b),x\big) = sign\big(1 - sign(x-c)\big)$$

Sea la función $g_{+\infty}: \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$g_{+\infty}(c,x) = \begin{cases} 0, & x \notin [c, +\infty[\\ 1, & x \in [c, +\infty[\end{cases}$$

$$g_{+\infty}(c,x) = \lim_{max(a,b) \to +\infty} g\big((a,b),x\big) = sign\big(1 + sign(x-c)\big)$$

Sea la función $r: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$r\big((a,b),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin \,]min(a,b), max(a,b)[\\ 1, & x \in \,]min(a,b), max(a,b)[\end{cases}$$

$$r\big((a,b),x\big) = \big(1 - g_{-\infty}(min(a,b),x)\big)\big(1 - g_{+\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Sea la función $s: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$s\big((a,b),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin \,]min(a,b), max(a,b)] \\ 1, & x \in \,]min(a,b), max(a,b)] \end{cases}$$

$$s\big((a,b),x\big) = \big(1 - g_{-\infty}(min(a,b),x)\big)\big(g_{-\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Sea la función $t: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

$$t\big((a,b),x\big) = \begin{cases} 0, & x \notin [min(a,b), max(a,b)[\\ 1, & x \in [min(a,b), max(a,b)[\end{cases}$$

$$t\big((a,b),x\big) = \big(g_{+\infty}(min(a,b),x)\big)\big(1 - g_{+\infty}(max(a,b),x)\big)$$

Ejemplo

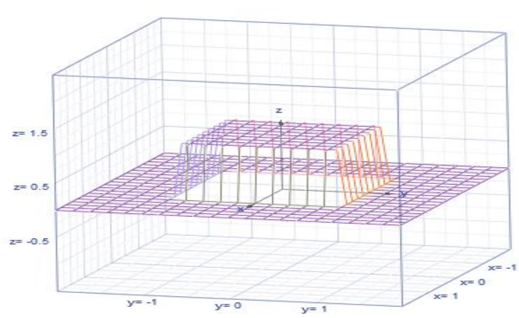
$$\delta(x) = g_{-\infty}(0,x)g_{+\infty}(0,x)$$

Ejemplo

Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida así:

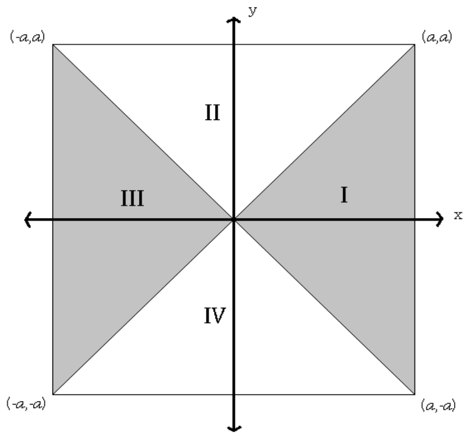
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin \,]-a,a[^2 \\ 1, & (x,y) \in \,]-a,a[^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= r\big((-a,a),x\big)r\big((-a,a),y\big) \\ &= \Big(1 - sign\big(1 - sign(x+a)\big)\Big)\Big(1 - sign\big(1 + sign(x-a)\big)\Big)\Big(1 \\ &\quad - sign\big(1 - sign(y+a)\big)\Big)\Big(1 - sign\big(1 + sign(y-a)\big)\Big) \\ &= 1 - sign\Big(2 - \big(sign(a - |x|) + sign(a - |y|)\big)\Big) \end{aligned}$$



$a = 1$

Sea $b \in \mathbb{R}^+$ y sea la superficie de una pirámide (*de intersección con el eje* z: $(0,0,b)$, *de base cuadrada en la intersección con el plano* $z = 0$, *y que tiene como vértices ahí a los puntos* (a,a), $(-a,a)$, $(-a,-a)$ *y* $(a,-a)$).



$\mathrm{I}: |y| < x < a$

$\mathrm{II}: |x| < y < a$

$\mathrm{III}: |y| < -x < a$

$\mathrm{IV}: |x| < -y < a$

Los puntos de cada cara triangular están dados por:

$\boldsymbol{A} = (0,0,b), \boldsymbol{B} = (sign(x)a, sign(y)a, 0), \boldsymbol{C} = (-sign(x)sign(|y| - |x|)a, sign(y)sign(|y| - |x|)a, -b)$

Sea $\boldsymbol{H} = (x, y, z)$ un punto cualquiera sobre estas caras, entonces la ecuación del plano de cada una de ellas es dada por:

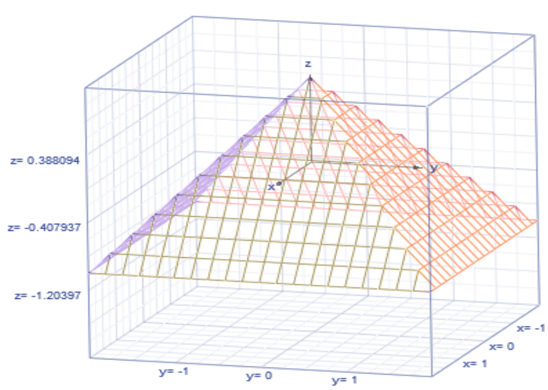
$$\big((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\big) \cdot (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{A}) = 0$$

Por consiguiente,

$$z = b\left(1 + \frac{sign(y)\big(1 - sign(|y| - |x|)\big)x - sign(x)\big(1 + sign(|y| - |x|)\big)y}{2sign(x)sign(y)sign(|y| - |x|)a}\right)$$

Empleando el factor $\frac{xy(|y|-|x|)}{xy(|y|-|x|)}$ se remueve la discontinuidad, en $|x| = |y|$, y se obtiene la expresión:

$$z = b\left(1 - \frac{(|x| + |y|) + \big||x| - |y|\big|}{2a}\right)$$



$a = 1$

$b = 1$

Finalmente, se define la función $g: \mathbb{R}^2 \to [0, b]$ definida así:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \,]-a, a[^2 \\ z, & (x, y) \in \,]-a, a[^2 \end{cases}$$

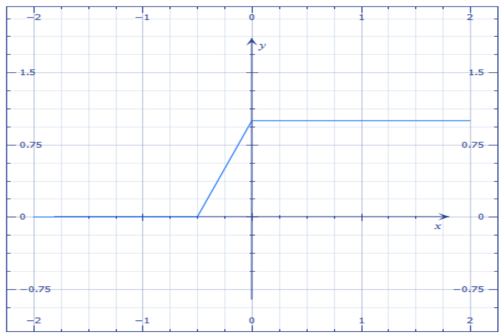
$$g(x, y) = zf(x, y)$$

Ejemplo

Sea la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \to [0,1]$ definida así:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1/n \\ nx + 1, & -1/n < x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = (nx+1)r\big((-1/n\,,0),x\big) + g_{+\infty}(0,x)$$
$$= (nx+1)\Big(1 - sign\big(1 - sign(x + 1/n)\big)\Big)\Big(1 - sign\big(1 + sign(x)\big)\Big) + sign\big(1 + sign(x)\big)$$



$n = 2$

Función piso

Sea la función $\lfloor\quad\rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definida así:

$$\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

Ejemplo

Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k < n$, se define la función $f_k: \bigcup_{j \in \mathbb{Z}}[nj + k, (nj + k) + 1] \to [0,1]$, así:

$$f_k(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & k = 0 \\ -\big(x - (\lfloor x \rfloor + 1)\big), & k = 1 \end{cases}$$

Luego, se define la función $f: \mathbb{R} \to [0,1]$, así:

$$f(x) = f_k(x), \qquad x \in [nj + k, (nj + k) + 1]$$

donde $j = \lfloor x/n \rfloor$

$$f(x) = \sum_{k<n} f_k(x) t\big((nj + k, (nj + k) + 1), x\big)$$

$$= (x - \lfloor x \rfloor) sign\left(1 + sign\left(x - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)\right)\left(1 - sign\left(1 + sign\left(x - \left(2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)\right)\right)$$
$$- \big(x - (\lfloor x \rfloor + 1)\big) sign\left(1 + sign\left(x - \left(2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)\right)\left(1 - sign\left(1 + sign\left(x - \left(2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2\right)\right)\right)\right)$$

Siendo $n = 2$, f es continua, periódica de período 2 e inyectiva en $[j, j + 1[$ (con $j \in \mathbb{Z}$).

Ejemplo

Sea la función $\varkappa: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ (*la composición entre las funciones delta y parte decimal*) definida así:

$$\varkappa(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Z} \\ 1, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\varkappa(x) = \delta(x - \lfloor x \rfloor) = 1 - sign(x - \lfloor x \rfloor)$$

Ahora, la función del ejemplo anterior se puede definir así:

$$f(x) = f_k(x), \qquad \lfloor x \rfloor \equiv k \ (mod\ n)$$

$$f(x) = \sum_{k<n} f_k(x)\, \varkappa\left(\frac{\lfloor x \rfloor - k}{n}\right)$$

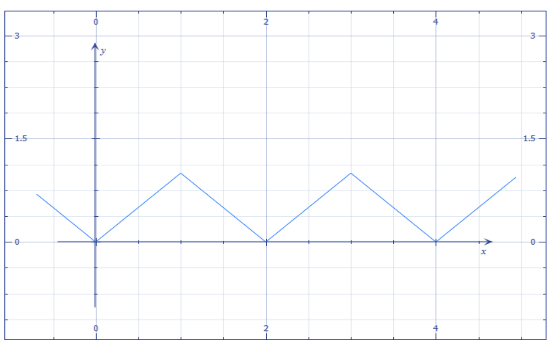
$$= (x - \lfloor x \rfloor)\left(1 - sign\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{2} - \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \right\rfloor\right)\right) - \big(x - (\lfloor x \rfloor + 1)\big)\left(1 - sign\left(\frac{\lfloor x \rfloor - 1}{2} - \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{2} \right\rfloor\right)\right)$$

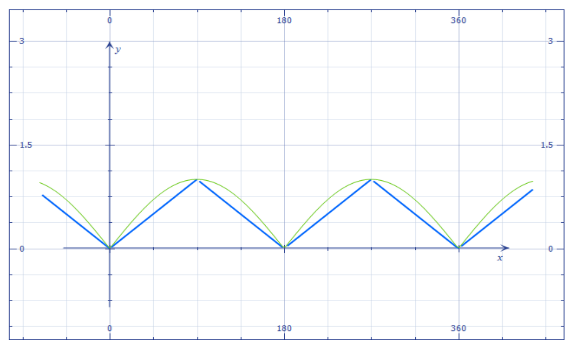
También,

$$f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \left(\lfloor x \rfloor + \frac{1 - (-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2}\right)\right)$$

Por otro lado,

$$f\left(\frac{x}{\pi/2}\right) \leq |\sin x|$$





Observación: $|\sin x|$ es una función continua en $\mathbb{R}$, periódica de período πe inyectiva en $\left[j\frac{\pi}{2}, (j+1)\frac{\pi}{2}\right[$ (con $j \in \mathbb{Z}$).

Parte entera

Sea la función $[\quad]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definida así:

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ -\lfloor -x \rfloor, & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [x] &= \lfloor x \rfloor g_{-\infty}(-1, x) - \lfloor -x \rfloor g_{+\infty}(1, x) \\ &= \lfloor x \rfloor sign\big(1 - sign(x+1)\big) - \lfloor -x \rfloor sign\big(1 + sign(x-1)\big) = \lfloor |x| \rfloor sign(x) \end{aligned}$$

Residuo

Sean $n \in \mathbb{N}$ y la función $[\![\quad]\!]_n: \mathbb{R} \to \{0, \dots, n-1\}$ definida así:

$$[\![x]\!]_n = k, \textit{ siempre que } \lfloor x \rfloor \equiv k \ (mod\ n)$$

Proyector

Se define la aplicación $\boldsymbol{P_n}: \mathbb{R}^n \times \{0, \dots, n-1\} \to \mathbb{R}$ así:

$$\boldsymbol{P_n}\big((y_o, \dots, y_{n-1}), k\big) = (y_0, \dots, y_{n-1}) \cdot \Big(\delta(k), \dots, \delta\big(k-(n-1)\big)\Big) = y_k$$

Además, sea $\{f_k\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ k<n}}$ una sucesión de funciones reales distintas, continuas en $[nj+k, (nj+k)+1]$ (con $j \in \mathbb{Z}$). Por consiguiente, es posible definir una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período n, así:

$$f(x) = \boldsymbol{P_n}(\{f_k(x)\}_{k<n}, [\![x]\!]_n) = f_{[\![x]\!]_n}(x)$$

Continua, si $f_k(k+1) = f_{k+1}(k+1)$ y $f_{n-1}(n) = f_0(0)$.

Ejemplo

La función del último ejemplo se puede generalizar de la siguiente manera.

Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k < 2^n$. Sea la función $f_k: \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}[2^n j + k, (2^n j + k) + 1] \to [0,1]$ definida así:

$$f_k(x) = \begin{cases} \left(\sin\dfrac{(\lfloor x\rfloor+1)\pi}{2^n} - \sin\dfrac{\lfloor x\rfloor\pi}{2^n}\right)(x - \lfloor x\rfloor) + \sin\dfrac{\lfloor x\rfloor\pi}{2^n}, & 0 \le k < 2^{n-1} \\ \left(\sin\dfrac{(\lfloor x\rfloor+1)\pi}{2^n} - \sin\dfrac{\lfloor x\rfloor\pi}{2^n}\right)\big(x - (\lfloor x\rfloor+1)\big) + \sin\dfrac{(\lfloor x\rfloor+1)\pi}{2^n}, & 2^{n-1} \le k < 2^n \end{cases}$$

Sea la función $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ definida así:

$$f(x) = f_k(x), \qquad \lfloor x\rfloor \equiv k \ (mod\ 2^n)$$

$$f(x) = \sum_{k<2^n} f_k(x)\,\varkappa\left(\frac{\lfloor x\rfloor - k}{2^n}\right)$$

También,

$$f(x) = \left(\sin\frac{(\lfloor x\rfloor+1)\pi}{2^n} - \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{2^n}\right)\left(x - \left(\lfloor x\rfloor + \frac{1-(-1)^{\left\lfloor\frac{x}{2^{n-1}}\right\rfloor}}{2}\right)\right) + \sin\frac{\left(\lfloor x\rfloor + \frac{1-(-1)^{\left\lfloor\frac{x}{2^{n-1}}\right\rfloor}}{2}\right)\pi}{2^n}$$

f es continua en $\mathbb{R}$, periódica de período 2^n e inyectiva en $[2^n j, 2^n j + 2^{n-1}[\cup [2^n j + 2^{n-1}, 2^n(j+1)[$ (con $j \in \mathbb{Z}$). Por otro lado,

$$f\left(2^n\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right) = 0, \qquad\qquad f\left(2^{n-1}\left(1+2\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right)\right) = 1,$$

$$f\left(2^{n-1}\left(1+2\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right) - \left|x - 2^{n-1}\left(1+2\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right)\right|\right) = f\left(2^{n-1}\left(1+2\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right) + \left|x - 2^{n-1}\left(1+2\left\lfloor\frac{x}{2^n}\right\rfloor\right)\right|\right)$$

Y, además,

$$f\left(\frac{x}{\pi/2^n}\right) \le |\sin x|$$

Ejemplo

Sea la función $\omega: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$\omega\big((a,b),x\big)=\begin{cases}0, & x\notin[min(a,b),max(a,b)]\cap\mathbb{Z}\\1, & x\in[min(a,b),max(a,b)]\cap\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\omega\big((a,b),x\big)=g\big((a,b),x\big)\varkappa(x)=sign^2\big(sign(x-a)-sign(x-b)\big)\big(1-sign(x-\lfloor x\rfloor)\big)$$

También,

$$\omega\big((a,b),x\big)=\sum_{n=-\lfloor -min(a,b)\rfloor}^{\lfloor max(a,b)\rfloor}\delta(x-n)=\delta\left(\prod_{n=-\lfloor -min(a,b)\rfloor}^{\lfloor max(a,b)\rfloor}(x-n)\right)$$

Relaciones entre intervalos cerrados

Contenencia

Sea la función $m:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\to\{0,1\}$ definida así:

$$m\big((a,b),(c,d)\big)=\begin{cases}0, & [min(a,b),max(a,b)]\nsubseteq[min(c,d),max(c,d)]\\1, & [min(a,b),max(a,b)]\subseteq[min(c,d),max(c,d)]\end{cases}$$

$$m\big((a,b),(c,d)\big)=g\big((a,b),c\big)g\big((a,b),d\big)$$

Igualdad

Sea la función $n:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\to\{0,1\}$ definida así:

$$n\big((a,b),(c,d)\big)=\begin{cases}0, & ([min(a,b),max(a,b)]\nsubseteq[min(c,d),max(c,d)])\vee([min(c,d),max(c,d)]\nsubseteq[min(a,b),max(a,b)])\\1, & ([min(a,b),max(a,b)]\subseteq[min(c,d),max(c,d)])\wedge([min(c,d),max(c,d)]\subseteq[min(a,b),max(a,b)])\end{cases}$$

$$n\big((a,b),(c,d)\big)=m\big((a,b),(c,d)\big)m\big((c,d),(a,b)\big)$$

También,

$$n\big((a,b),(c,d)\big)=\delta(a-c)\delta(b-d)+\delta(a-d)\delta(b-c)$$

Disyunción

Sea la función $p:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\to\{0,1\}$ definida así:

$$p\big((a,b),(c,d)\big)=\begin{cases}0, & [min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]\neq\emptyset\\1, & [min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]=\emptyset\end{cases}$$

$$p\big((a,b),(c,d)\big)=1-\Big(1-g\big((a,b),c\big)\Big)\Big(1-g\big((a,b),d\big)\Big)$$

Intersecantes

Sea la función $q:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u\neq v\}^2\to\{0,1\}$ definida así:

$$q\big((a,b),(c,d)\big)=\begin{cases}0, & ([min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]=\emptyset)\vee([min(a,b),max(a,b)]\subseteq[min(c,d),max(c,d)])\\ & \vee\ ([min(c,d),max(c,d)]\subseteq[min(a,b),max(a,b)])\\1, & ([min(a,b),max(a,b)]\cap[min(c,d),max(c,d)]\neq\emptyset)\wedge([min(a,b),max(a,b)]\nsubseteq[min(c,d),max(c,d)])\\ & \wedge([min(c,d),max(c,d)]\nsubseteq[min(a,b),max(a,b)])\end{cases}$$

$$q\big((a,b),(c,d)\big)=\Big(1-p\big((a,b),(c,d)\big)\Big)\Big(1-m\big((a,b),(c,d)\big)\Big)\Big(1-m\big((c,d),(a,b)\big)\Big)$$

Conjunto de Cantor

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se define el siguiente conjunto:

$$W_{[a,b]} = \left\{ I \subseteq [a,b] | I = \bigcup_{\substack{[a_i,b_i]\subseteq[a,b] \\ [a_i,b_i]\cap[a_j,b_j]=\emptyset \\ i,j\in\mathbb{N}\ con\ i\neq j}} [a_i, b_i] \right\}$$

Sea la aplicación $H: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ definida así:

$$H([a,b]) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right]$$

Con la propiedad:

$$H(A \cup B) = H(A) \cup H(B), \qquad A, B \in W_{[a,b]}$$

Se define la siguiente sucesión de conjuntos cerrados $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ así:

$$F_n = \begin{cases} [a,b], & n = 0 \\ H(F_{n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

Cada F_n es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos de longitud $\left(\frac{b-a}{3}\right)^n$

Para $a = 0\ y\ b = 1$, el *conjunto de Cantor* es definido así:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

C es un conjunto cerrado en los reales, no vacío y de medida nula.

Como sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$:

n	A_n
0	$\{0\}$
1	$\{0,2\}$
2	$\{0,2,6,8\}$
3	$\{0,2,6,8,18,20,24,26\}$
4	$\{0,2,6,8,18,20,24,26,54,56,60,62,72,74,78,80\}$

$$A_n = \begin{cases} \{0\}, & n = 0 \\ A_{n-1} \cup \{p \in \mathbb{N} | p = q + \left(max(A_{n-1}) + (3^{n-1}+1)\right) \wedge q \in A_{n-1}\}, & n > 0 \end{cases}$$

Como sucesión de números $\{a_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ k\in\mathbb{N} \\ k\leq 2^n}}$:

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k}, & n > 0\ \wedge k \leq 2^{n-1} \\ a_{n-1,k} + \left(a_{n-1,2^{n-1}+(3^{n-1}+1)}\right), & n > 0\ \wedge k > 2^{n-1} \end{cases}$$

También,

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k} + \left\lfloor \frac{k-1}{2^{n-1}} \right\rfloor \left(a_{n-1,2^{n-1}+(3^{n-1}+1)} \right), & n > 0 \end{cases}$$

Se define la sucesión $\{F_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ k\in\mathbb{N} \\ k\leq 2^n}}$ de intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$ así:

$$F_{n,k} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k}+1) \right]$$

Luego,

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} F_{n,k}$$

Se define la sucesión de funciones $f_n: [0,1] \to \{0,1\}$ así:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin F_n \\ 1, & x \in F_n \end{cases}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} g\left(\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k}+1) \right), x \right)$$

Conjunto potencia

Sea K un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre K así:

$A\mathcal{R}B$, si y solo si, *"A y B son subconjuntos finitos de K y tienen igual cardinal".*

Luego, la clase de equivalencia de A se define así:

$$[A] = \begin{cases} \{A\}, & A = \emptyset \\ \{Ranf | f: \{1,2,\cdots,Card(A)\} \to K \ es\ una\ función\ inyectiva\}, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

Y el conjunto potencia es dado por:

$$\mathcal{P}(K) = \bigcup_{A\subseteq K} [A]$$